SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

*B. Franchi*

# DISUGUAGLIANZE ISOPERIMETRICHE

10 Maggio 1990

Una disuguaglianza isoperimetrica (ad esempio in $\mathbf{R}^n$) è una disuguaglianza che coinvolge la misura n-dimensionale di una regione $\Omega$ sufficientemente regolare e la misura (n-1)-dimensionale (in senso opportuno) della frontiera di $\Omega$. Tale disuguaglianza sarà ottimale se, per qualche classe di insiemi, si riduce ad una eguaglianza. Come modello di questo tipo di risultati possiamo assumere il seguente esempio "elementare":

**Teorema 1.** Sia $\gamma$ *una curva sufficientemente regolare, semplice e chiusa in* $\mathbf{R}^2$. *Se* $\Omega$ *è la componente connessa limitata di* $\mathbf{R}^2\setminus\gamma$, *si ha:*

$$l^2(\gamma) \geq 4\pi|\Omega|, \tag{1}$$

*dove* $l(\gamma)$ *è la lunghezza di* $\gamma$ *e* $|\Omega|$ *è la misura di Lebesgue di* $\Omega$.

**Dimostrazione.** Sia $\varphi:[0,2\pi] \to \gamma$ una parametrizzazione di $\gamma$ proporzionale alla lunghezza d'arco. Risulta

$$\int_0^{2\pi} \|\varphi'(t)\|^2\, dt = \frac{l^2}{2\pi},$$

dove $l = l(\gamma)$. D'altra parte, per la formula di Green nel piano,

$$|\Omega| = -\int_{\gamma^+} x_2\, dx_1 = -\int_0^{2\pi} \varphi_2(t)\varphi_1'(t)\, dt.$$

Dunque

$$l^2 - 4\pi|\Omega| = 2\pi \int_0^{2\pi} (\dot{\phi}_1^2(t) + \varphi_2^2(t) + 2\varphi_2(t)\dot{\phi}_1(t))dt$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (\dot{\phi}_1(t) + \varphi_2(t))^2\, dt + 2\pi \int_0^{2\pi} (\dot{\phi}_2^2(t) - \varphi_2^2(t))dt.$$

Dunque la (1) è provata se

$$(2) \qquad \int_0^{2\pi} \varphi_2^2(t)dt \le \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_2^2(t)dt.$$

La (2) in generale non è vera (ad es. se $\varphi_2 \equiv$ cost.), ma scegliendo opportunamente il sistema di riferimento ci si riduce alla seguente disuguaglianza

(3) *se* $\psi:[0,2\pi] \to \mathbf{R}$ *è di classe* $C^1$ *e* $\int_0^{2\pi} \psi(t)dt = 0,$

*allora* $$\int_0^{2\pi} \psi^2(t)dt \le \int_0^{2\pi} \dot{\psi}^2(t)dt.$$

In una variabile, l'unico punto delicato è il controllo esatto della costante della disuguaglianza di Poincaré. Una prova molto semplice è quella ottenuta utilizzando le serie di Fourier.

**Osservazione.** La (1) è ottimale perchè le circonferenze (e solo esse) soddisfano (1) con il segno di eguaglianza.

Questo seminario non vuole essere una rassegna esaustiva sul soggetto delle disuguaglianze isoperimetriche, ma solo presentare alcuni risultati e applicazioni di più immediato interesse per le equazioni alle derivate parziali. Ampie rassegne sono contenute in [P], [0], [G], [Gr2], [BZ].

Il Teorema 1 ha un analogo in $\mathbf{R}^n$.

**Teorema 2.** *Sia* $\Omega$ *un dominio arbitrario in* $\mathbf{R}^n$. *Allora*

(4) $$(M_{n-1}(\partial\Omega))^n \ge n^n \omega_n |\Omega|^{n-1},$$

*dove* $\omega_n$ *è la misura della superficie sferica* (n-1)-*dimensionale* $\mathbf{S}^{k-1}$ *e*

$M_{n-1}(\partial\Omega)$ è il "(n-1)-*dimensional outer Minkowski content*" *definito come segue:*

$$M_{n-1}(\partial\Omega) = \liminf_{r\to 0} \frac{|\{x+y, x\in \Omega, |y|<r\}|-|\Omega|}{r} .$$

(Se $\Omega$ è sufficientemente regolare, $M_{n-1}(\partial\Omega)$ coincide con l'usuale misura di superficie di $\partial\Omega$: si veda ad es., [F], Cap. 5).

**Dimostrazione.** Ricordiamo la disuguaglianza di Brunn-Minkowski: se A,B sono insiemi compatti in $\mathbf{R}^n$ non vuoti, posto

$$A+B = \{a+b,\ a \in A,\ b \in B\},$$

risulta

$$|A+B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n}.$$

Per la dimostrazione, si veda ad es. [F], 3.2 o [BZ] Th. 8.1.1.

Sia ora $r>0$ piccolo. Posto

$$\Omega_r = \{x \in \mathbf{R}^n \text{ tali che esiste } y \in \Omega,\ |y-x| < r\},$$

si ha $\Omega_r = \Omega + B_r$, dove $B_r = B_r(0) = \{y \in \mathbf{R}^n;\ |y| < r\}$. Allora

$$|\Omega_r| \geq (|\Omega|^{1/n} + |B_r|^{1/n})^n = (|\Omega|^{1/n} + (\omega_n r^n)^{1/n})^n$$

$$\geq |\Omega| + n\,|\Omega|^{(n-1)/n}\,\omega_n^{1/n}\,r,$$

e quindi

$$\frac{|\Omega_r| - |\Omega|}{r} \geq n\,|\Omega|^{(n-1)/n}\,\omega_n^{1/n},$$

da cui l'asserto.

Diamo ora due esempi che mostrano l'importanza di disuguaglianze isoperimetriche del tipo (4) in questioni di equazioni alle derivate parziali.

**Esempio 1:** disuguaglianza di Sobolev (Federer & Fleming e V.G. Maz'ya).

*Sia* $\Omega$ *un aperto limitato di* $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$. *Poniamo*

$$(5) \qquad S(\Omega) = \inf_u \left(\int_\Omega |\nabla u|\,dx\right)^n \Big/ \left(\int_\Omega |u|^{n/n-1}\,dx\right)^{n-1}$$

*al variare di* $u \in C_0^\infty(\Omega)$, *e*

$$\mathcal{I}(\Omega) = \inf_{A} (H_{n-1}(\partial A))^n / |A|^{n-1}$$

*al variare di tutti gli aperti* A *tali che* $\bar{A} \subset \Omega$ *e per i quali* $\partial A$ *è una varietà* $C^\infty$. *Qui* $H_{n-1}$ *è la misura di Hausdorff* (n-1)*-dimensionale. Si ha allora* $S(\Omega) = \mathcal{I}(\Omega)$.

(In altri termini, la disuguaglianza isoperimetrica è equivalente al Teorema di immersione di Sobolev nella versione più forte). Lo stesso risultato vale se si sostituisce $\Omega$ con una varietà Riemanniana non compatta.

**Dimostrazione.** Sia A un aperto del tipo della definizione di $\mathcal{I}(\Omega)$. Poniamo ($\varepsilon>0$ piccolo)

$$u_\varepsilon(x)= \begin{cases} 1, \ x\in A, \ d(x,\partial A)\geq\varepsilon, \\ d(x,\partial A)/\varepsilon, \ x\in A, \ d(x,\partial A)<\varepsilon \\ 0 \ \ x\in \Omega\backslash A \end{cases}$$

Continuiamo a indicare con $u_\varepsilon$ una regolarizzazione $C^\infty$ della funzione così definita e stimiamo il quoziente in $S(\Omega)$ con $u = u_\varepsilon$. Al limite per $\varepsilon \to 0+$ si ottiene

$$S(\Omega) \leq (H_{n-1}(\partial A))^n / |A|^{n-1}$$

e quindi

$$S(\Omega) \leq \mathcal{I}(\Omega).$$

Sia ora $u \in C_0^\infty(\Omega)$ e applichiamo la formula di coarea tenendo presente che, per il lemma di Sard, per quasi ogni $t \in \mathbf{R}$ $\{x;\ u(x) = t\}$ è una varietà di $C^\infty$. Si ha:

$$\int_\Omega |\nabla u(x)| dx = \int_0^\infty dt\, H_{n-1}(\{x \in \Omega;\ |u(x)| = t\})$$

$$= \int_0^\infty dt\, H_{n-1}(\partial(\{x \in \Omega;\ |u(x)| > t\})) \geq \mathcal{I}(\Omega)^{1/n} \int_0^\infty dt\, V(t)^{(n-1)/n}$$

dove $V(t) = |\{x \in \Omega;\ |u(x)| > t\}|$.

D'altra parte

$$\int_\Omega |u(x)|^{n/(n-1)} dx = \frac{n}{n-1} \int_0^\infty t^{1/(n-1)}\, V(t)\, dt \leq \left( \int_0^\infty V(t)^{n/(n-1)}\, dt \right)^{n/(n-1)}$$

perchè per ogni $\tau > 0$ esiste $\tau_1 \in (0,\tau)$ tale che

$$\left( \int_0^\tau V(t)^{(n-1)/n}\, dt \right)^{n/(n-1)} - \frac{n}{n-1} \int_0^\tau t^{n/(n-1)}\, V(t)\, dt$$

$$= \frac{n\tau}{n-1}\left\{\left(\int_0^{\tau_1} V(t)^{(n-1)/n}\, dt\right)^{1/(n-1)} V(\tau_1)^{(n-1)/n} - \tau_1^{1/(n-1)}\, V(\tau_1)\right\}$$

$\geq$ (tenendo presente che $V(t) \geq V(\tau_1)$ se $t \in (0,\tau_1)$)

$$\frac{n}{n-1} t \left\{\tau_1^{1/(n-1)}\ V(\tau_1)^{1/n+(n-1)/n} - \tau_1^{1/(n-1)}\ V(\tau_1)\right\} = 0$$

Dunque $s(\Omega) \geq \mathfrak{I}(\Omega)$ e l'asserto segue.

**Esempio 2:** *disuguaglianza di Faber-Krahn.*

Sia $\Omega$ un aperto regolare in $\mathbb{R}^n$. E' allora noto che, posto

$$(6) \qquad \lambda_1(\Omega) = \inf_{u \in H_0^1} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx}{\int_\Omega |u|^2\, dx},$$

$\lambda_1(\Omega)$ coincide con il più piccolo autovalore del problema di Dirichlet

$$(7) \qquad \begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ u \in H^\varepsilon(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Denotiamo con D la sfera n-dimensionale tale che $|D| = |\Omega|$. *La disuguaglianza di Faber-Krahn asserisce allora che* $\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(D)$.

**Dimostrazione.** Sia u una autofunzione del problema di Dirichlet (7) corrispondente all'autovalore $\lambda_1(\Omega)$. Poichè u non si annulla in $\Omega$, possiamo sempre supporre $u > 0$ in $\Omega$.

Inoltre, è possibile verificare che

$$V(t) = |\{x \in \Omega\,;\, u(x) > t\}|$$

è una funzione $C^\infty$ su $[0,\infty) \cap R_f$, dove con $R_f$ indichiamo l'insieme dei valori regolari di f. Ora se $0 \le t \le \max f = T$, consideriamo la funzione r(t) definita implicitamente dalla relazione

$$V(t) = |B(0,r(t))|. \tag{8}$$

In particolare $B(0,r(0)) = D$. La funzione r così definita è continua in $[0,T]$ e $C^\infty$ in $R_f \cap (0,T)$ e strettamente decrescente. Definiamo ora il riarrangiamento radiale di u nel modo seguente

$$u^*(x) = r^{-1}(|x|).$$

Poichè $u^*(x) > t$ se e solo se $|x| < r(t)$, le funzioni distribuzione di $u^*$ e di u coincidono, per la (7). In particolare allora

(9) $$\int_D u^*(x)^2\,dx = \int_\Omega u(x)^2\,dx.$$

Differenziando la (8) otteniamo

(10) $$V'(t) = H_{n-1}\,(\partial B(0,r(t))r'(t);$$

d'altra parte, per la formula di coarea

$$V(t) = \int_t^T d\tau \int_{u=\tau} \frac{1}{|\nabla u|}\,dH_{n-1}\,,$$

e quindi

$$r(t) = -\frac{1}{H_{n-1}(\partial B(0,r(t)))} \int_{u=t} \frac{1}{|\nabla u|}\,dH_{n-1}\,.$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha:

$$(H_{n-1}(\{u=t\}))^2 \le \int_{u=t} |\nabla u|\,dH_{n-1} \int_{u=t} \frac{1}{|\nabla u|}\,dH_{n-1}$$

$$\le -r'(t)\,H_{n-1}\,(\partial B(0,r(t)) \int_{u=t} |\nabla u|\,dH_{n-1}.$$

Quindi, per la (4)

$$- r'(t) \int_{u=t} |\nabla u| \, dH_{n-1}$$

$$\geq \left\{ \frac{H_{n-1}(\{u=t\})}{H_{n-1}(\partial B(0,r(t)))} \right\}^2 H_{n-1}(\partial B(0,r(t)))$$

$$\geq \left\{ \frac{n\, \omega_n^{1/n} |V(t)|^{(n-1)/n}}{H_{n-1}(\partial B(0,r(t)))} \right\}^2 H_{n-1}(\partial B(0,r(t)))$$

$$= \left\{ \frac{n\, \omega_n^{1/n} |B(0,r(t)|)^{(n-1)/n}}{H_{n-1}(\partial B(0,r(t)))} \right\}^2 H_{n-1}(\partial B(0,r(t))) \quad = H_{n1}(\partial B(0,r(t))).$$

Allora

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = \int_0^T dt \int_{u=t} |\nabla u| \, dH_{n-1}$$

$$\geq \int_0^T dt \, \frac{H_{n-1}(\partial B(0,r(t)))}{-r'(t)} \, .$$

D'altra parte

$$\int_D |\nabla u^*(x)|^2 dx = \int_0^T dt \int_{u^*(x)=t} |\nabla u^*(x)| dt$$

$$= \int_0^T dt \int_{|x|=r(t)} |(r^{-1})(|x|)| \, dH_{n-1} =$$

$$\int_0^T dt \, \frac{H_{n-1}(\partial B(0,r(t)))}{-r'(t)} \quad ,$$

e quindi

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{\int_D u^*(x)^2 dx}{\int_D |\nabla u^*(x)|^2 dx} \geq \lambda_1{}'D).$$

Con ciò l'asserto è provato. ■

Esistono altre categorie di "oggetti" per i quali si possono studiare le disuguaglianze isoperimetriche. Un primo esempio, che vedremo importante dal punto di vista applicativo, è quello delle correnti in $R^n$.

Se U è un aperto di $R^n$, una k-corrente su U è un funzionale lineare continuo nello spazio delle k-forme lineari $C^\infty$ a supporto compatto su U (del tipo cioè

$$(11) \qquad \varphi = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} \omega^{i_1,\ldots,i_k} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

dowe $\omega^{i_1,\dots,i_k} \in \mathcal{D}(U)$).

Per una k-corrente T con $k \geq 1$ è naturale definire una (k-1)-corrente $\partial T$ (il bordo di T) nel modo seguente: se $\varphi$ è una (k-1)-forma lineare $C^\infty$ a supporto compatto, allora

$$\partial T(\varphi) \overset{\text{def}}{=} T(d\varphi). \tag{12}$$

Inoltre se T è una k-corrente, chiameremo *massa* di T (e scriveremo M(T)) il numero

$$M(T) = \sup\{T(\varphi), \|\varphi\| \leq 1\},$$

dove $\|\varphi\|^2 = \sup_x \langle \varphi(x), \varphi(x)\rangle$ , $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denotando il prodotto scalare sulle k-forme lineari. Una k-corrente si dirà intera se

$$M(T) + M(\partial T) < \infty.$$

Una presentazione precisa della teoria delle correnti può essere trovata in [F] o in [S].

Ovviamente una 0-corrente è una distribuzione di $\mathcal{D}'(v)$. Se $k > 0$, una

k-corrente è una estensione naturale del concetto di k-varietà orientabile. Infatti, se $(M,\nu)$ è una k-varietà orientata tale che $H_k(M) < \infty$, il funzionale

$$\varphi \to \int_{(M,\nu)} \varphi$$

è una k-corrente. Il teorema di Stokes dà allora un senso alla definizione (12).

Per le correnti vale il seguente risultato isoperimetrico:

**Teorema 3. (Federer & Fleming:** si veda [F], 4.5.9). *Sia* T *una* n-*corrente intera in* $R^n$. *Allora*

$$M(\partial T) \geq n\, \omega_n^{1/n}\, M(T)^{(n-1)n}. \tag{13}$$

Per illustrare l'interesse di questi concetti nell'ambito delle equazioni a derivate parziali, presentiamo alcuni risultati dovuti essenzialmente a M. Miranda [M], Bombieri, De Giorgi & Miranda [BDGM] (si veda anche Ladyzhenskaya & Ural'tseva [LU]). Il problema di partenza è determinare una stima a priori del gradiente delle soluzioni (a priori limitate) dell'equazione della curvatura media in $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = H(x) \tag{14}$$

dove, più in generale si può sostituire all'operatore a sinistra un operatore "tipo curvatura media". A tal fine ci si vuole procurare una disuguaglianza di Sobolev sulla superficie di $\mathbf{R}^n$ $S = \{(x,u(x))\}$ del tipo seguente:

sia f arbitraria in $C_0^\infty(\Omega')$ , dove conv $(\Omega') \subseteq \Omega$;

allora

$$(15) \qquad \int_{S'} |f|^{n/(n-1)} \sqrt{1+u_x^2}\, dx \le \beta \int_{S'} |\delta f|^2 \sqrt{1+u_x^2}\, dx$$

dove S' è la parte di S che si proietta su $\Omega'$ e $|\delta f|^2$ è la norma del gradiente intrinseco di f, cioè

$$(16) \qquad \delta f = \left( f_1 - \sum_k \frac{f_k\, u_k\, u_1}{1 + u_x^2}, \ldots, f_n - \sum_k \frac{f_k\, u_k\, u_n}{1 + u_x^2}, \sum_k \frac{f_k\, u_k}{1 + u_x^2} \right).$$

Per provare (15), in analogia a quanto fatto nell'Esempio 1, proveremo che, posto $S_t = \{(x,x_n) \in S; \quad |f(x)| > t\}$, risulta

$$(17) \qquad H_n(S_t) \le \beta_1 (M(\partial \tilde{S}_t))^{n/(n-1)}$$

dove $\tilde{S}_t$ è la corrente associata a $S_t$.

Diamo un'idea della dimostrazione di (17) (con qualche imprecisione).

Consideriamo la n-forma

$$\omega(x) = \frac{1}{c_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1} u_i}{\sqrt{1+u_x^2}} \; dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_{n+1}$$

$$+ x_{n-1} H(x) \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n ,$$

dove $c_1$ è scelto in modo che $\|\omega\| \leq 1$. Per l'equazione (14) risulta

$$d\omega = 0$$

e quindi, per il lemma di Poincaré, $\omega = d\varphi$, per una opportuna (n+1)-forma $\varphi$. Inoltre se $|u| \leq M$,

$$\tilde{S}_t(\omega) = \int_{S_t} \omega$$

$$= \frac{1}{c_1} \int_{\Omega_t} \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^2}{\sqrt{1+u_x^2}} + uH(x) \right) dx$$

$$\geq \frac{1}{c_1} \int_{\Omega_t} \sqrt{1+u_x^2} \, dx - \frac{1}{c_1} (1+M \sup |H(x)|) \int_{\Omega_t} dx$$

$$= \frac{1}{c_1} H_n(S_t) - c_2 |\Omega_t|$$

$$\geq \frac{1}{c_1} H_n(S_t) - c_3 |\partial\Omega_t|^{n/(n-1)} \quad \text{(per la dis. isoperimetrica in } \mathbf{R}^n)$$

$$\geq \frac{1}{c_1} H_n(S_t) - c_3 M(\partial\tilde{S}_t)^{n/(n-1)} \quad \text{(perchè } 1 \leq \sqrt{1+u_x^2}).$$

D'altra parte, ancora un risultato di Federer & Fleming assicura l'esistenza, per quasi ogni t, di un corrente $Y_t$ tale che

$$\partial Y_t = \partial\tilde{S}_t \quad , \quad M(Y_t) \leq \beta_2 (M(\partial\tilde{S}_t))^{n/(n-1)}$$

(si vede, ad es., [S] teorema 30.1). Allora

$$\tilde{S}_t(\omega) = \tilde{S}_t(d\varphi) = \partial\tilde{S}_t(\varphi) = \partial Y_t(\varphi) \quad = \quad Y_t(d\varphi) = Y_t(\omega).$$

Dunque

$$\tilde{S}_t(\omega) \leq M(Y_t) \leq \beta_2 \, (M(\partial\tilde{S}_t))^{n/(n-1)},$$

e quindi

$$H_n(S_t) \leq c_1(c_3 + \beta_2) \, (M(\partial\tilde{S}_t))^{n/(n-1)},$$

come volevasi. ■

E' naturale chiedersi se disuguaglianze isoperimetriche del tipo delle precedenti rimangano valide sostituendo $\mathbf{R}^n$ con varietà riemanniane. E' facile vedere che, ad esempio, una disuguaglianza isoperimetrica del tipo di (1) non è valida su $S^1 = \partial B(0,1)$ ; d'altra parte, per tale superficie sussiste la stima

$$l^2(\gamma) \geq 4\pi \, | H_{n-1}(\Omega)| \; - \; (H_{n-1}(\Omega))^2.$$

La curvatura della superficie gioca evidentemente un ruolo fondamentale: ad esempio si può provare che, *se* S *è una superficie di curvatura di Gauss* K, *allora* (17) *è vera per tutti i domini semplicemente connessi* $\Omega$ *se e solo se* $K \leq 0$ *ovunque in* S.

Vari risultati di questo genere sono raccolti in [O] e [BZ]. Per concludere ci pare interessante ricordare un recente risultato di M. Gromov [Gr1] che sottolinea il ruolo della curvatura di Ricci per le disuguaglianze isoperimetriche. La curvatura di Ricci è in qualche modo intermedia tra la curvatura media (che è troppo "debole" topologicamente) e la curvatura di Gauss (che è troppo "forte"). La curvatura di Ricci può essere definita formalmente in modo corretto a partire dal tensore di curvatura di una varietà riemanniana (v., ad es. [GHL], Definizione 3.18); tuttavia il suo significato

può essere meglio intuito a partire dall'osservazione seguente.

Sia (M,g) una varietà riemanniana completa di dimensione n. Se $\varepsilon > 0$ è piccolo e denotiamo con $S(x_o,\varepsilon)$ la sfera di centro di $x_o$ e raggio $\varepsilon$ su M e con $B_n = B(0,1)$ la sfera unitaria in $\mathbf{R}^n$, risulta

$$\mathrm{vol}_g(B_\varepsilon) = |B_n|\, \varepsilon^n \left(1 - \frac{K(x_o)}{6(n+2)}\, \varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3)\right)$$

per $\varepsilon \to 0$, dove $K(x_o)$ è la curvatura in Gauss in $x_o$.

In modo analogo, la curvatura di Ricci nel punto $x_o$ ($\mathrm{Ric}_{x_o}$), che è una forma bilineare su $T_{x_o}M$, dipende dal secondo termine delle formule di Taylor di $\frac{dv_g}{dv_{g_{x_o}}}$ (h) per $h \to 0$, dove $\frac{dv_g}{dv_{g_{x_o}}}$ (h) è la densità nel punto $h \in \mathbf{R}^n$ della misura canonica riemanniana di $dv_g$ rispetto alla misura euclidea del piano tangente (un intorno di $x_o$ in M essendo identificato a $\mathbf{R}^n$ per mezzo dell'applicazione esponenziale inversa). Più precisamente si ha:

$$\frac{dv_g}{dv_{g_{x_o}}}(h) = 1 - \frac{1}{6}\, \mathrm{Ric}_{x_o}(h,h) + 0\,(g_{x_o}(h,h)^{3/2}).$$

Vale allora il seguente risultato:

*Sia* V *una varietà riemanniana* $C^\infty$ *di dimensione* $n \geq 2$, *tale la curvatura di Ricci di* V è $\geq (n-1)R^{-2}$, $R > 0$ (*cioè* $\mathrm{Ric}_x(h,h) \geq (n-1)R^{-2}\,|h|^2$

$\forall h \in \mathbf{R}^n$, $h \neq 0$) *e sia* $V_+ \subset V$ *una regione compatta con frontiera regolare* $\partial V_+$.

*Sia* $V_+^*$ *la sfera in* $\partial B(0,R)$ *in* $\mathbf{R}^{n+1}$ *tale che*

$$\frac{\mathrm{Vol}\, V_+^*}{\mathrm{Vol}\, \partial B(0,R)} = \frac{\mathrm{Vol}\, V_+}{\mathrm{Vol}\, V} .$$

*Allora*

$$\frac{\mathrm{Vol}\, \partial V_+}{\mathrm{Vol}\, V} \geq \frac{\mathrm{Vol}\, \partial V_+^*}{\mathrm{Vol}\, \partial B(0,R)} .$$

**Dimostrazione.** Fra tutti i domini $\Omega_+ \subseteq V$ tali che $\mathrm{Vol}\, \Omega_+ = \mathrm{Vol}\, V_+$ ne esiste uno, sia $\bar{\Omega}_+$, che minimizza $\mathrm{Vol}\, \partial\Omega_+$. Se $n \leq 7$, $\partial\bar{\Omega}_+$ è regolare; ci limiteremo a questo caso; il caso $n > 7$ richiede ulteriori precauzioni. Poichè $\partial\Omega_+$ è minimale, $\partial\Omega_+$ ha curvatura media costante $\bar{\mu}$. Supponiamo che $\bar{\mu}$ non ecceda la curvatura media di $\partial V_+^*$ (in caso contrario si ragiona sulle regioni complementari $V \backslash \Omega_+$ e $\partial B(0,R) \backslash V_+^*$). Possiamo allora utilizzare i teoremi di confronto di E. Heintze e H. Karcher nel modo seguente. Sia $\nu$ la normale unitaria a $\partial\Omega_+$ e denotiamo con $F = F(v,t)$ l'applicazione esponenziale nella direzione $\nu$. Sia $J(v,t)$ il jacobiano di $F$ ($v \in \partial\Omega_+$, $t > 0$). Si ha per ogni $v_0 \in \partial\Omega_+$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\log J(v_o,t) \leq -\frac{1}{n-1}\left(\frac{d}{dt}\log J(v_o,t)\right)^2 - \mathrm{Ric}_{v_o}\, v\,.$$

Da queste maggiorazioni, per confronto con la corrispondente identità verificata sulla sfera "rotonda" in $\mathbf{R}^{n+1}$, segue che

$$J(v_o,t) \leq J^*(t),$$

dove $J^*$ è la quantità corrispondente a $J$ per la sfera geodetica in $\partial B(0,R) \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ di raggio $r_o \in [0,\pi R]$, tale che $R^{-1}\cot\frac{r_o}{R} = -\bar{\mu}/(n-1)$ (la cui frontiera ha curvatura media $\bar{\mu}$) e dove $t$ è piccolo, nel senso che $(v_o\, t) \to F(v_o,t)$ è un diffeomorfismo. Se denotiamo con $W = \{(v_o,t),\ 0<t<r(v_o)\}$ l'insieme dei punti $(v_o,t)$ così fatti, $\mathrm{vol}(F(W) \cap \Omega_+) = 0$, e quindi (tenendo conto che $t \leq r_o$)

$$\mathrm{Vol}(\Omega_+) \leq \mathrm{Vol}\, F(W) = \int_{\partial\Omega_+} dv \int_0^{r_o(v)} J(v,t)dt$$

$$\leq \frac{\mathrm{Vol}\,\partial\Omega_+}{\mathrm{Vol}\,\partial V_+^*} \int_{\partial V_+^*} dv \int_0^{r_o} J_k(t)dt =$$

$$= \frac{\mathrm{Vol}\,\partial\Omega_+}{\mathrm{Vol}\,\partial V_+^*}\ \mathrm{Vol}\, V_+^*\,.$$

Sostituendo nell'espressione di $\partial\Omega_+$, si ottiene la disuguaglianza cercata.

## BIBLIOGRAFIA


[BDGM] E. BOMBIERI, E. de GIORGI, M. MIRANDA, *Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche*, Arch. Rat. Mech. Anal., 32 (1969), 255-267.

[BZ] Yu.D. BURAGO, V.A. ZALGALLER, *Geometric Inequalities*, Grundlehren der mathematisches Wissenschaften 285, Springer 1988.

[F] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer 1969.

[G] S. GALLOT, *Inégalités isopérimetriques et analytiques sur les variétés riemanniennes*, Colloqui del CNR (Roma 1986), Astérisque.

[GHL] S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE, *Riemannian Geometry*, Springer Universitext, 1987.

[Gr1] M. GROMOV, *Paul Levy's Isoperimetric Inequality*, prepubblicazioni IHES, 1980.

[Gr2] M. GROMOV, *Isoperimetric Inequalities in Riemannian Manifolds*, Appendix I in Lecture Notes in Mathematics 1200, Springer.

[LU] O.A. LADYZHENSKAYA, N.N. URAL'TSEVA, *Local Estimates for the Gradient of Solutions of Non-uniformly Elliptic and Parabolic Equations*, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), 677-703.

[M] M. MIRANDA, *Disuguaglianza di Sobolev sulle ipersuperfici minimali*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 38 (1967), 69-79.

[O] R. OSSERMAN, *The Isoperimetric Inequality*, Bull. Amer. Math. Soc., 84 (1978), 1182-1238.

[P] L.E. PAYNE, *Isoperimetric Inequalities and their Applications*, SIAM Rev., 9 (1967), 435-488.

[S] L. SIMON, *Lectures on Geometric Measure Theory*, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis of the Australian National University, vol. 3, 1983.